



多軸応力場における疲労解析方法を教えてください。

参照 QNo.: FB-15, FB-27, FB-28



多軸応力場における疲労解析の方法の前に、多軸応力場における強度解析の方法を示す。多軸応力場は、3つの主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) で表示する。出発点は、降伏強度(降伏点又は耐力)である。降伏条件にはトレスカ(Tresca)条件とミーゼス(Mises)条件がある。

トレスカ条件は最大せん断応力条件ともいい、単軸換算の相当応力 σ_{eq} と単軸の降伏強度 σ_Y の関係を、次式で表示する。

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_Y \quad (1)$$

ミーゼス条件はせん断ひずみエネルギー条件ともいい、単軸換算の相当応力 σ_{eq} と単軸の降伏強度 σ_Y の関係を、次式で表示する。

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_Y \quad (2)$$

対象とする材料によって結果は異なるが、一般的にミーゼス条件はトレスカ条件よりも実験結果とよく一致する。また、トレスカ条件はミーゼス条件よりも保守的な予測となる。

上記の降伏条件は、降伏強度を超えたひずみ硬化塑性体の弾塑性応力-ひずみ関係にも拡張され、構造の塑性崩壊が解析されている。以前は、塑性崩壊の解析に、解析が容易(式の形が単純)なトレスカ条件が適用されてきた。しかし、計算力学の進歩により、トレスカ条件の優位性は失われ、現在ではミーゼス条件の適用が一般的になっている。圧力容器の塑性崩壊圧力の解析が、典型的な例である。

一方、疲労解析には、トレスカ条件が適用されてきた。この状況は、現在でも変わらない。ASME ボイラーと圧力容器規格 Section VIII, Division 2 では、応力解析と疲労解析を規定している。疲労解析ではトレスカ条件の相当応力を「応力強さ」として用いる。応力強さ S の 1 サイクルの変動範囲の最大値 S_{max} と最小値 S_{min} から繰返し応力強さの振幅 S_a と平均 S_m を算出する。

$$S_a = \frac{S_{max} - S_{min}}{2} \quad (3)$$

$$S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} \quad (4)$$

単軸の疲労曲線に、上記の S_a と S_m を適用し、多軸応力場における疲労強度または疲労寿命を予測する。

圧力容器の場合の例を示す。内圧 P を保持する圧力容器の円筒胴(内外径比 K)の内面では、周方向応力 σ_θ 、軸方向応力 σ_z 、径方向応力 σ_r の 3 軸応力場となる。

$$\sigma_\theta = \frac{1 + K^2}{K^2 - 1} P \quad (5)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{K^2 - 1} P \quad (6)$$

$$\sigma_r = -P \quad (7)$$

応力強さ S は、次式となる。

$$S = \sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2K^2}{K^2 - 1} P \quad (8)$$

圧力の 1 サイクルを $0 \rightarrow P \rightarrow 0$ とすれば(片振り)、繰返し応力強さの振幅 S_a と平均 S_m は次式となる。

$$S_a = \frac{K^2}{K^2 - 1} P \quad (9)$$

$$S_m = \frac{K^2}{K^2 - 1} P \quad (10)$$

疲労解析にミーゼス条件ではなく、トレスカ条件を適用する理由は、明確に示されていない。以下では、疲労き裂の発生と進展のメカニズムに基づき、トレスカ条件を考察する。

最大せん断応力 τ_{max} は、最大主応力 σ_1 と最小主応力 σ_3 の応力差として、次式で与えられる。

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (11)$$

σ_1 軸を材料の表面とし、 σ_1 軸と σ_3 軸の平面で材料の断面を表示して、図 1 に示す。図 1 において、 σ_1 の主応力面は σ_3 軸を含む紙面に垂直な面、 σ_3 の主応力面は σ_1 軸を含む紙面に垂直な面(材料表面)であり、最大せん断応力面は 2 つの主応力面を分割する面となる。

圧力容器の場合の例で示したように、 $\sigma_3 = -P$ となる場合がある。それを除けば、 σ_3 は自由表面に垂直な応力成分で、0 となる。したがって、多軸応力場であっても、材料表面は平面応力状態(σ_1 と σ_2 の 2 軸応力)で、しかも σ_2 と $\sigma_3 (=0)$ に関係なく、 σ_1 だけで、 τ_{max} の大きさと方向が決まる。この場合に、最大せん断応力面と 2 つの主応力面のなす角度は、 45° である。 σ_3 が 0 ではない場合には、 σ_3 の大きさによってこの角度は変化する。

最大せん断応力面に沿ってすべりが生じ、すべり面分離の結果として、疲労き裂が発生する。すなわち、多軸応力場であっても、疲労き裂の発生メカニズムは単軸応力の場合と同じである。

次に、疲労き裂の進展メカニズムを考察する。図 1 には、 σ_3 軸に関して対称形をなすもう一つの最大せん断応力面を示す。最大主応力 σ_1 の繰返しに伴い、2 つの最大せん断応力面で、交互に

すべりが生じる。 σ_1 軸と σ_3 軸の交点の位置をき裂先端とすれば、すべり面分離の結果としてき裂が開口し、進展する。き裂が進展する面は2つの最大せん断応力面を分割する σ_1 の主応力面である。また、き裂の進展方向は σ_3 軸の方向である。すなわち、多軸応力場であっても、疲労き裂の進展のメカニズムは、単軸応力の場合と同じである。疲労き裂は最大主応力面に沿って進展し、主破面を形成する。

ミーゼス条件の相当応力には、方向性がない。したがって、疲労き裂の発生と進展のメカニズムに基づき、ミーゼス条件を考察することはできない。

以下では、代表的な多軸応力場を取り上げ、応力強さ(トレスカ条件)を適用する疲労解析の方法を示す。

すでに示した圧力容器の場合、周方向応力に残留応力 σ_{res} の存在を仮定すれば、応力強さ S は、次式となる。

$$S = \frac{2K^2}{K^2 - 1} P + \sigma_{res} \quad (12)$$

したがって、繰返し応力強さの振幅 S_a と平均 S_m は、次式となる。

$$S_a = \frac{K^2}{K^2 - 1} P \quad (13)$$

$$S_m = \frac{K^2}{K^2 - 1} P + \sigma_{res} \quad (14)$$

残留応力は振幅に寄与しないが、平均に寄与する。多軸応力場における疲労解析では、振幅と平均への寄与を見極める必要がある。

円形断面の軸にねじりモーメントを負荷する場合、軸表面のせん断応力を τ とすれば、中間主応力 σ_2 が自由表面に垂直な応力 ($\sigma_2=0$) で、最大主応力 $\sigma_1=\tau$ と最小主応力 $\sigma_3=-\tau$ の2軸応力場となる。したがって、応力強さ S は、次式となる。

$$S = \sigma_1 - \sigma_3 = \tau - (-\tau) = 2\tau \quad (15)$$

ねじりモーメントの1サイクルを正負(両振り)とすれば、繰返し応力強さの振幅 S_a と平均 S_m は、次式となる。

$$S_a = 2\tau \quad (16)$$

$$S_m = 0 \quad (17)$$

この場合には、軸表面において、疲労き裂は最大せん断応力面(軸を含む面または軸と垂直な面)に沿って発生した後、最大主応力面(軸と 45° をなす面)に沿って進展する。

材料表面が流体環境に接し、流体の温度変動がある場合には、熱応力が発生する。材料表面の熱応力 σ_T は等2軸応力場で、最小主応力 σ_3 が材料表面に垂直な応力 ($\sigma_3=0$) となる。したがって、

応力強さ S は、次式となる。

$$S = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T \quad (18)$$

温度差 ΔT の 1 サイクルの熱応力範囲を $\Delta \sigma_T$ とすれば、繰返し応力強さの振幅 S_a と平均 S_m は、次式となる。

$$S_a = \frac{\Delta \sigma_T}{2} \quad (19)$$

$$S_m = \frac{\Delta \sigma_T}{2} \quad (20)$$

鋼の場合、 $\Delta T=100(^{\circ}\text{C})$ で、 $S_a=110(\text{MPa})$ となる。

この場合は等 2 軸応力場であるから、最大せん断応力面に方向性はない。したがって、材料表面には亀甲状のき裂が無数に発生する。ただし、配管の内面で、曲げモーメントが負荷される場合には、式(20)の S_m に曲げ応力が加算され、複数き裂の位置と数は限定され、き裂は最大主応力面(軸と垂直な面)に沿って進展する。

多軸応力場における疲労解析の古典的な例が、引張り(または曲げ)とねじりの組合せ応力の場合の疲労限度の予測式である。負荷は両振りの同位相で、多くの材料の実験結果がある。実験結果に対して、トレスカ条件は保守的で、ミーゼス条件は比較的よく一致し、よく合う楕円の実験式が提案されている。

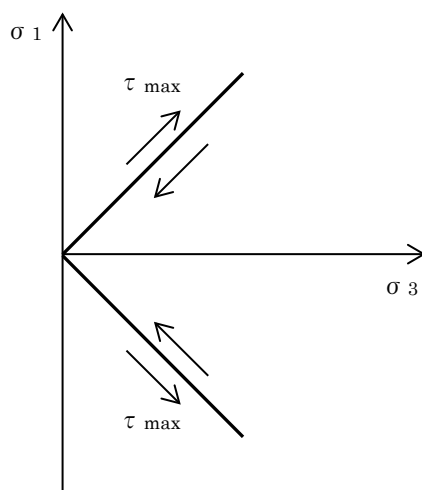


図 1 最大せん断応力面