

3-1 材料の力学と強度*



大畑 充**

Mechanics and Strength of Materials*

by OHATA Mitsuru**

キーワード 応力, ひずみ, 静的強度, 降伏条件, 応力集中

1. はじめに

材料力学には主要な3つの役割がある。一つは、「ものづくり」に用いる材料の強度評価である。次にそれをふまえて「もの」を構成する構造物や部材の強度・変形の観点からの合理的な設計、そして既に存在し供用中の「もの」の強度・変形評価や健全性評価であり、材料力学はこれらを達成するための具体的な方法を与える。材料力学の理論・考え方は、より一般的な弾性学を中心とするいわゆる連続体力学を背景としている。

一方、実際の材料は連続体ではなく、微視的に見ると均質ではないし等方的な性質を持つものでもない。しかし、それを連続体に置き換えて、理想化されたモデルに外力が加わる場合の物体内部の力（応力）の受け持ち方や変形の様子を評価するものである。そもそも連続体とは、物体の占める領域を点で埋め尽くし、変形前に隣り同士であった点は変形後も隣り同士にあるという制約のもとに構成されるモデルである。材料力学ではこのような応力をパラメータとして材料強度を評価し、構造物や部材に生じる応力がこの強度を越えないように設計し、かつ供用中もそれが維持されるようにする。強度の観点から構造物や部材の設計・維持を考えると、連続体の力学はその合理的な手段を与えるものとして有効に活用され得る。

本講では、構造部材に外力が加えられた際に、その部材内部における応力やひずみ状態を把握するための材料の力学と強度の基礎について解説する。また、構造部材を設計する際には、一般に少なくとも部材が降伏（弾性変形から塑性変形へ遷移）しないよう配慮されるが、複

雑な応力状態下（組合せ応力下）で材料が降伏する際の条件について述べる。さらに、溶接構造部材においては応力やひずみの集中源となる形状的な不連続の存在は避けたいものであるが、溶接継手の静的強度や疲労強度の評価・設計の際に留意すべき応力集中の基礎について解説する。

2. 材料の静的強度

金属材料は、一般に負荷に対して弾性的に変形した後、塑性変形段階を経て破断に至る。設計の基本は構造部材の永久変形や破断を防ぐことにあり、このような終局状態に至るまでの材料の強さや変形能がまず問題となる。その基本的特性を得るために引張試験が行われる。

引張試験には通常、棒状あるいは板状の平行部をもつ平滑な試験片が用いられ、軸方向に引張荷重 P を作用させる。通常、金属材料などの変形特性を表すのに、荷重とその荷重による引張変形量との関係で表すが、荷重-伸び特性は試験片の寸法などに依存することから、一般に、垂直引張応力 σ と（伸び）ひずみ ε の関係、すなわち応力-ひずみ線図として表すことが多い。引張試験片での応力、ひずみの値は次式で与えられ、それぞれ公称応力、公称ひずみという。

$$\text{公称応力} : \sigma = P/A_0 \quad (1)$$

$$\text{公称ひずみ} : \varepsilon = (l-l_0)/l_0 \quad (2)$$

ここで、 A_0 ：試験前の断面積、 l_0 ：平行部に定めた標点間の距離、 $(l-l_0)$ ：標点間の伸び、である。応力の単位は力/面積で、SI単位では N/mm^2 (MPa)、ひずみは無次元量であり%で表すことが一般的である。

工業的に最も多く用いられている軟鋼について、引張試験における変形挙動を応力とひずみの関係で表したの

* 原稿受付 平成20年2月26日

** 正 員 大阪大学大学院 工学研究科 Member, Osaka University
Graduate School of Engineering

が図1 (a) である。

応力とひずみが比例関係にある弾性範囲での直線の勾配が縦弾性係数 E (あるいはヤング率) であり, 軟鋼では室温で 206 kN/mm^2 (応力の単位をもつ) 程度の値をとる. A 点で塑性変形が生じ (これを降伏という), 応力がわずかに下がった後, BB' 間ではほぼ一定の応力で塑性変形が進行する. B' 点から C 点まではひずみ増加とともに応力も再び増大する. この現象を“加工硬化”あるいは“ひずみ硬化”という.

A 点, B 点の応力を, それぞれ上降伏点 (上降伏応力: σ_{YU}), 下降伏点 (下降伏応力: σ_{YL}) という. このような降伏現象は, 高張力鋼や合金鋼, アルミニウム合金では明瞭に見られず, 図1 (b) に示すようなラウンドハウス型の応力-ひずみ線図を呈する. このような場合には, 実用上, A' 点の除荷した後の永久ひずみが 0.2% となるような応力を“ 0.2% 耐力 ($\sigma_{0.2}$)”と称して, 降伏点と同様な意味の強さの基準量として用いている. 降伏点および 0.2% 耐力を総称して“降伏強さ”あるいは“降伏応力” (σ_Y) ということが多い.

最大荷重点 C では, 試験片の一部に塑性変形が集中してくびれが生じ, 荷重は低下していく. その後, くびれ部分の断面積が急激に減少してついに D 点で破断してし

まう. C 点の応力を“引張強さ”といい, 通常 σ_T や σ_B などて表す.

また, 強度とともに一つ, 材料の機械的性質として材料の変形能を表す指標が用いられる. このような材料の延性の指標としてよく用いられるものに, 以下に定義される“破断伸び ϵ_F ” (一定の標点距離で計測した破断時のひずみ (単に“伸び”ともよばれる)) や絞り (または“断面収縮率”ともよばれる) ϕ がある.

$$\epsilon_F = (l_F - l_0) / l_0, \quad \phi = (A_0 - A_f) / A_0 \quad (3)$$

ここで, l_F : 破断後の標点間距離, A_f : 破断後のくびれ部の最小断面積, A_0 : 初期断面積, である. ただし, 破断伸びは, 試験片の寸法や標点距離の大きさと異なった値となるため, 規格等で決められた測り方をしたものと士でないと比較にならないことに注意すべきである. また, 最大荷重時のひずみ (公称ひずみ) である“一樣伸び ϵ_T ”もよく用いられる.

降伏応力または 0.2% 耐力, 引張強さ, 破断伸び, 絞り, 一樣伸びを狭義の“材料の機械的性質”として参照することが多い. また, 引張強さに対する降伏応力の比 (σ_Y / σ_T) を“降伏比”とよび, 降伏比が大きいことは降伏後, 破断に至るまでの最終強さの余裕が少ないことを意味する. 最近の建築用鋼材 (JIS 規格の建築構造鋼 SN 鋼) では, この降伏比の上限として 80% に規定されている.

一方, 公称応力, 公称ひずみは材料の機械的性質を表す指標にはなるが, 材料の変形時に“真”に作用する応力, ひずみを表していない. これは引張力の増大に伴って, ポアソン効果によって試験片の断面積が減少し, 標点間距離も増大していくことによる. 材料の真応力 s , 真ひずみ e は, 時々刻々の試験片断面積を A , 標点間距離を l , 微小伸びを dl として, 次式で定義される.

$$\text{真応力} : s = P/A \quad (4)$$

$$\text{真ひずみ} : e = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (5)$$

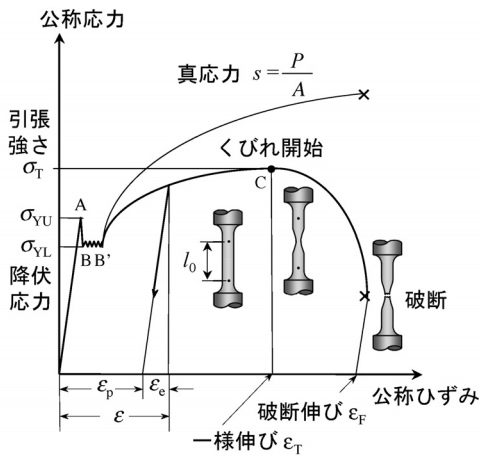
真応力は変形時に材料に“真”に作用する応力であり, 最大荷重点を過ぎてても低下することはなく, 材料そのものは常に加工硬化することを表している. 真応力 s , 真ひずみ e と, 公称応力 σ , 公称ひずみ ϵ の間には, 一樣伸びまでは近似的に体積不変の法則

$$l_0 \cdot A_0 = l \cdot A \quad (6)$$

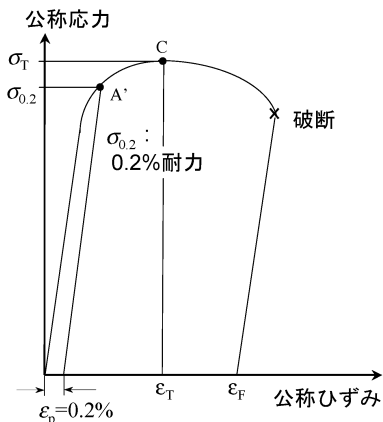
が適用できることから, 次の関係がある.

$$s = \sigma(1 + \epsilon), \quad e = \ln(1 + \epsilon) \quad (7)$$

一般に材料の引張強度をいうとき, 前述の平滑な試験片を室温で静的な一軸負荷により実施される引張試験で得られる特性を指す. これは, 金属材料の降伏応力や引張強さ (流動応力) が温度や負荷時のひずみ速度の影響



(a) 軟鋼 (低強度鋼)



(b) 高強度鋼

図1 金属材料の引張試験における応力-ひずみ線図

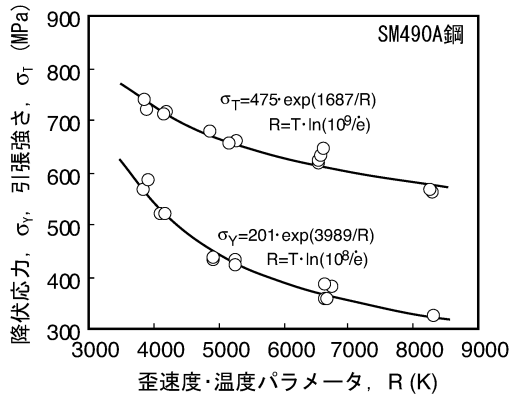


図2 強度に及ぼす温度・ひずみ速度の影響

を受ける場合があるためである。一般に、低炭素鋼などのbcc金属材料では、降伏応力や引張強さは温度が低いほど、またひずみ速度は速いほど大きくなることはよく知られていることである。このような材料強度の温度やひずみ速度依存性は、熱活性化過程（材料を構成する原子の熱振動の助けを受けて進行する過程）により説明することができる。すなわち、ひずみ速度が大きくなると熱活性化過程が寄与する時間が短くなって降伏応力や流動応力が高くなるのに対し、温度が高くなると熱活性化過程が活発になり、逆に強度は低くなる傾向にある。温度を下げることにひずみ速度を速くすることは強度に対して同等の効果をもたらすことから、両者を強度に対して等価に評価するためのパラメータとしてひずみ速度・温度パラメータ R (式(8)) が提案されている。

$$R = T \cdot \ln(A / \dot{\epsilon}) \tag{8}$$

ここに、 T は温度(K)で $\dot{\epsilon}$ はひずみ速度(/s)である。図2は、490MPa級の溶接構造用圧延鋼材SM490A鋼に対して、温度とひずみ速度を種々変化させたときの降伏応力と引張強さをパラメータ R で整理されたものである²⁾。いずれもパラメータ R で一義的に整理できており、 R が小さい、すなわち温度が低くひずみ速度が速いほど強度が上昇している。なお、図からも見てとれるように、降伏応力の方が引張強さよりも R の影響が大きく、 R が小さいほど降伏比(σ_v / σ_T)は大きくなる。また、降伏初期の加工硬化能は、降伏比だけでなく一様伸び ϵ_T も関係するが、これは R にほとんど影響されないことが報告されている²⁾。

3. 物体に働く力と応力の定義

物体が外部から力を受けて静的な釣り合い状態にあるとする。この物体が釣り合い状態にあるためには、外部から作用する力に抗して物体内部に内力が生じている。物体に加わる巨視的な力を、作用の仕方によって分類すると以下ようになる(図3参照)。

(1) 外力

(a) 物体力：重力など物体の体積要素に直接働く力であり、単位体積当たりの力として表される。

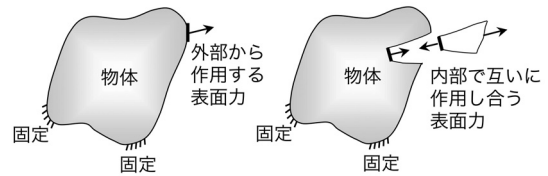


図3 表面力

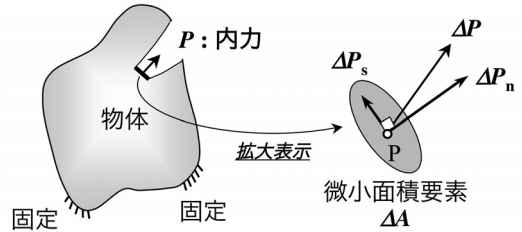


図4 三次元物体中の応力の定義

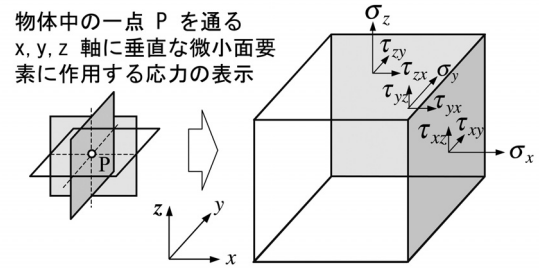


図5 物体中の応力成分

(b) 表面力（物体の外部から作用する場合）：物体の周囲から加えられる力で、他の物体との接触によって作用し、単位面積当たりの力として定義される。

(2) 内力（物体の内部で互いに作用し合う表面力）：物体内部において隣接する部分によって互いに作用し合う力である。物体内部においてある面を考えればその面を境にして互いに大きさが等しく、向きが反対の力を及ぼし合っており、単位面積当たりの力として定義される。

この静止した物体の内部の微小面要素に働く内力を考える。図4に示すように、内力 ΔP は

- ・微小面要素に垂直な成分 ΔP_n と、
- ・微小面要素に沿った成分 ΔP_s

に分解できる。そこで、微小要素をさらに小さくしてその極限をとると、それぞれに対する応力が以下のように定義できる。 t を“応力ベクトル”， σ を“垂直応力”， τ を“せん断応力”という。

$$t = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}, \quad \sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta A}, \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_s}{\Delta A} \tag{9}$$

このように、応力は、物体内のある点を通る任意の面に対して定義されるものである（応力ベクトル t は当然ながら想定する面に垂直とは限らない）。物体中のある点 P において、 P 点を通り座標軸に垂直な3面に作用する応力を表示すると図5のようになる。 x 軸に垂直な面につ

いて見ると、 σ_x が垂直応力で上述の σ に対応する。 τ_{xy} や τ_{xz} はせん断応力で、この合応力が上述の τ に対応する。なお応力の添字は、最初の添字を法線にもつ面を表し、最後の添字は作用する方向を表している。また、せん断応力に対しては、

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (10)$$

の関係が成立し（微小要素のモーメントの釣合いから導かれる）、物体内のある点の応力状態は、

$$\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\} \quad (11)$$

の6成分の応力により表すことができる。

4. 応力とひずみ

外力を受けて釣合い状態にある部材において、その内部の任意の点における応力やひずみの状態を知ることは、部材の設計や強度評価に欠かせない。ここでは、特に応力に着目し、応力とはどのようなものであるかを分かり易く解説する。そのため、多少の数式の提示は避けがたく、理解を助けるための必要最小限の数式の提示は惜しまないこととした。なお、一般に物体は三次元的であるが、理解を容易にするために主として二次元物体を対象として記述する。

4.1 応力

4.1.1 任意の面に作用する応力

三次元物体内の一点において、任意の面上の応力成分は6つの直角座標応力成分で一意的に表せるが、直角座標応力が一定でも考える面の方向（単位法線ベクトルで表される）が変われば応力ベクトルも変化し、考える面によって値が異なる。すなわち、応力は面の方向を規定すれば力と同様に矢印で表現してベクトル（応力ベクトル）として扱うことができるが、断面の方向を変えると対応して応力ベクトルの大きさ・方向も変化するので、本来のベクトル量とは異なる力学量である。面の方向を規定することは、面の向きを与えることである。すなわち、面の法線ベクトルを与えるということが面を規定するということになる。つまり、一点を起点とする無数の法線ベクトル n の一つ一つが、無数の応力ベクトル t にどのように対応しているかを表現できれば、応力状態の全情報を把握し得たことになる。その両ベクトルを結び付ける関係は2階のテンソル量であり、このテンソル量が“応力テンソル”である。式で表すと、

$$t = Tn \quad (12)$$

となり、このテンソル T が応力テンソルである。

具体的に、図6に示すような直角座標系（x-y座標系）における二次元物体を想定し、x軸およびy軸に垂直な面に作用している応力ベクトル（ σ_x , σ_y , τ_{xy} ）が既知である場合、物体内の任意の点Oにおいて任意の傾きを持つ面に作用している応力を求めてみる。そこでまず、図

7に示すように面に作用する応力ベクトルのx, y方向の成分 t_x, t_y を求めることを考える。

任意の面は、単位長さの法線ベクトル n で表すこととし、この余弦（cos）は“方向余弦”と呼ばれる。x方向およびy方向の力の釣合いを考えると、それぞれ次式のようになる。

$$x \text{ 方向} : t_x \cdot 1 = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \quad (13)$$

$$y \text{ 方向} : t_y \cdot 1 = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \quad (14)$$

これを行列表示すると式(15)のようになり、

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \quad (15)$$

$t = Tn$ で表示されることから、

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad (16)$$

が応力テンソルとなる。すなわち、座標軸に垂直な面に作用している応力ベクトルから式(15)の応力テンソルが求まり、任意の傾きを持つ面を与える（法線ベクトルを作用させる）ことで、その点における応力が完全に記述できたといえる。従って、図6における垂直応力 σ とせん断応力 τ は、x, y方向の成分 t_x, t_y のそれぞれを面に垂直な成分と平行な成分に分解し、それらを加え合わせるこ

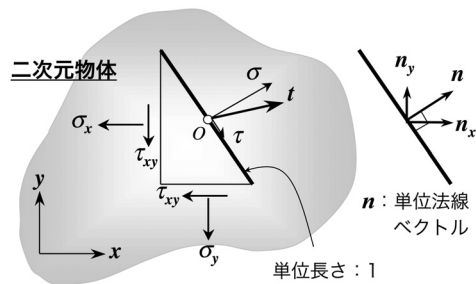


図6 二次元物体中の任意の点における任意面に作用する垂直応力とせん断応力

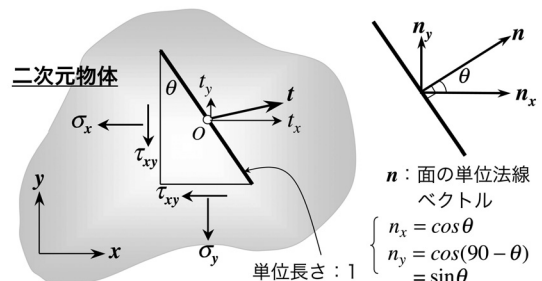


図7 二次元物体中の任意の点における任意面に作用する軸方向応力成分

とで次のように得られる.

$$\begin{aligned} \sigma &= t_x \cos\theta + t_y \sin\theta \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tau &= t_x \sin\theta - t_y \cos\theta \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、より理解を深めるために、図8に示すように一様断面の棒に軸方向引張荷重を与えた際に、断面 n-n に作用する応力をテンソルを介して求めてみる. 断面 n-n に作用する垂直応力 σ とせん断応力 τ は図中に示す解で与えられることは容易に導かれよう. ここで、棒内では x 方向および y 方向に垂直な面に作用する応力ベクトルは至る所で同じであり、断面 n-n に作用する応力ベクトルは式 (15) にならって以下のように表される.

$$t = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P/A (= \sigma_x) & 0 (= \tau_{xy}) \\ 0 (= \tau_{xy}) & 0 (= \sigma_y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\therefore t = (t_x, t_y) = (P \cos\theta / A, 0)$$

このように応力テンソルを用いることで比較的簡単に図中に示したものと同一解が得られることが理解できよう.

4.1.2 主応力と主せん断応力

二次元物体内部において x 軸および y 軸に垂直な面に作

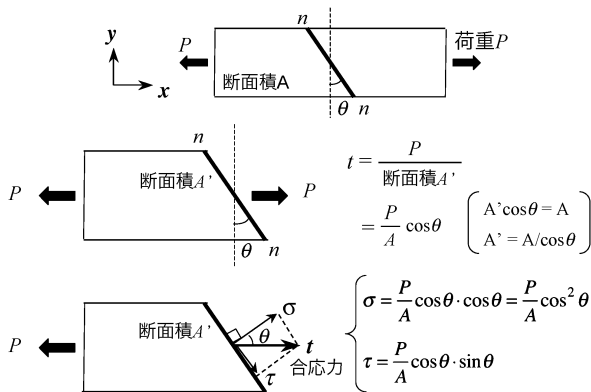


図8 引張荷重を受ける一様断面棒の任意断面における応力ベクトル

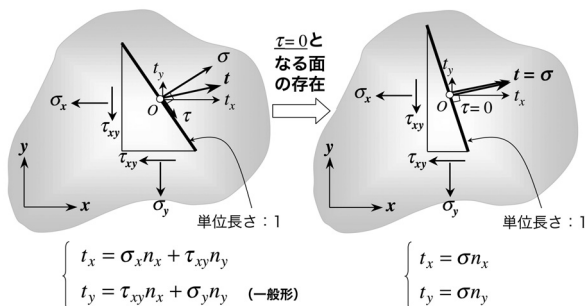


図9 二次元物体中の任意の点においてせん断応力が0となる面の存在

用している応力ベクトルが既知であれば、任意の点において任意の傾きを持つ面に作用している応力が求められることがわかった. このことから、垂直応力が最大および最小となるような面が存在し得ることは容易に推察できよう. 式 (17) から、垂直応力が極値 (そのときの面の角度を θ_m とする) をとる条件は式 (20) となり、従って式 (21) を満たす θ_m が、垂直応力が極値をとる面の方向を与える (解は 2 個ある).

$$(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta_m - 2\tau_{xy}\cos 2\theta_m = 0 \quad (20)$$

$$\tan 2\theta_m = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (21)$$

式 (21) を満たす θ_m を式 (17) に代入すると、垂直応力 σ の最大と最小の値が次式のように得られる.

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (22)$$

$$\sigma_{min} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (23)$$

この垂直応力の最大値および最小値を“主応力”とよび、一般に σ_1, σ_2 (三次元の場合は $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)) で表される. また主応力が生じる面の方向を“主軸”といい互いに直交する. 主応力が生じる面におけるせん断応力は、式 (18) と式 (20) を比べると 0 となることから、主応力が作用する面にはせん断応力は作用しないことがわかる. 言い換えると、主応力とは、せん断応力が作用しない面に作用する垂直応力であり (図9参照)、物体内の任意の点に作用する内力の物理的な状態を定める値であって座標系の選択には依存しないものである.

一方、せん断応力が最大および最小となる面を考えた場合、その面の方向を θ'_m とすると、式 (18) より θ'_m を次式のように求めることができる.

$$\tan 2\theta'_m = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (24)$$

θ'_m の解が 2 個あり、それらが直交していることも主応力の場合と同じである. また、 $\tan 2\theta_m \cdot \tan 2\theta'_m = -1$ となることから、 θ'_m の面は主応力の面と 45° の角度をなす面であることがわかる. この面におけるせん断応力は、

$$\tau_{max} = +\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (25)$$

$$\tau_{min} = -\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (26)$$

となり、互いに直交してその絶対値は等しい (共役であ

る). この絶対値をせん断応力 τ_1 とい、主応力で表すと式 (22), (23) に照らして次式のような関係にあることが導かれる。

$$\tau_1 = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| \quad (27)$$

4.2 ひずみ

二次元物体内の任意の点におけるひずみ状態は、応力の場合と同様に、直交座標系におけるひずみ成分 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ により完全に記述される。すなわち、ひずみもテンソルである。任意の方向のひずみは、式 (17) および式 (18) の任意の面における応力から、5章で述べる応力とひずみの関係（一般化フックの法則）を適用することでも導かれる。

5. 応力-ひずみ関係の基礎

2章で述べた平滑丸棒の引張試験による応力とひずみの関係は、垂直応力 1 成分と垂直ひずみ 1 成分の関係 ($\sigma = E\varepsilon$: フックの法則) であった。三次元物体中では、応力状態とひずみ状態を記述するためには応力 6 成分とひずみ 6 成分の関係が必要となる。

三次元の線形等方弾性体が多軸応力状態にあるとき、例えば、x 軸方向の垂直ひずみ ε_x は、x 軸方向応力による縦ひずみ（軸方向ひずみ）と y 軸および z 軸方向応力による横ひずみの和として、

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z \quad (28)$$

と表される。垂直応力はせん断ひずみに影響を与えず、また、せん断応力は垂直ひずみには影響しないことから、応力 6 成分とひずみ 6 成分の関係は一般に式 (29) で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

このような関係を“一般化フックの法則”という。

一般に物体は三次元的であるが、問題によってはそれを二次元問題に置き換えて近似的に応力やひずみを算定することができる。二次元問題とは、一般に“平面応力”と“平面ひずみ”の問題のことをいう。

平面応力状態とは、非常に薄い平板 (z 方向の寸法が x, y 方向の寸法に比べて非常に小さい物体) など、二次元平面内のみ外力が作用する場合で、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ のみが 0 でなく、他の成分は全て 0 とみなせる状態である。ただし、ポアソン効果により z 方向 (板厚方向) のひずみ

は 0 とはならない。実際には完全な平面応力状態でも、薄肉圧力容器など、種々の問題を近似的に平面応力状態とみなして解析することが行われる。

一方、平面ひずみ状態とは、一方向 (例えば z 方向) のひずみが完全に拘束されるような状態である。例えば、両端を固定した円筒や長手方向の変形が拘束されたダムや堤防などが該当する。また、厚板の問題で場所によって板厚方向の変形の程度が異なると、変形の大きい部分は変形の小さい部分から自由な変形を拘束されることがある。このような問題は完全な平面ひずみ問題とはいえないが、近似的に平面ひずみ状態とみなされることが多い。平面ひずみ状態では、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 以外のひずみ成分が全て 0 である。しかし、ポアソン効果により z 方向 (拘束されている方向) に変形を生じようとするが、それが抑えられているので z 方向の垂直応力は 0 にはならない。

6. 材料の降伏と降伏条件

6.1 材料の降伏

2章で述べた一軸引張負荷を受ける部材では、軸方向の応力が限界値に達すると塑性変形が開始する (弾性状態から塑性状態へ遷移する)。しかし、多くの応力成分が存在する一般の応力状態下 (組合せ応力下) では、すべての成分を考慮して塑性変形を開始する条件を作成する必要がある。多軸応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$) が作用しているとき、それらの応力成分の値がいかなる組合せのときにその金属材料が降伏するかを判定する条件を数式で表したものが“降伏条件”である。

金属材料 (多結晶材料) の降伏条件は、次のような実験事実を満足する降伏条件を仮定し、実験事実とよく一致する条件式を選び出すことで提案されてきた。

- 1) 降伏現象はせん断応力によって生じるため、降伏条件はせん断応力の関数として表される
- 2) 降伏は静水圧 (平均垂直) 応力に影響されない
- 3) 降伏現象は座標系の取り方で変化しない

二次元応力状態 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) のときを想定すると、任意の面のせん断応力が式 (18) で表されることから、静水圧応力だけを変化させたときにはせん断応力は変わらない (垂直応力 σ_x, σ_y は静水圧応力の変化量だけ変化する)。従って、1), 2) の条件は、せん断応力によって降伏条件を表すことで解決できる。また、せん断応力を主応力や応力の不変量で表して降伏条件に適用すれば上記の条件が全て満足されることになる。

6.2 降伏条件

上記のような、材料の降伏挙動に関する実験事実に基づいて、代表的な二つの降伏条件が提案されてきた。

- (1) Tresca (トレスカ) の降伏条件

単結晶の降伏がせん断応力によって生じることから、多結晶金属の降伏条件についての最も単純な仮定は「最大せん断応力が限界に達すると降伏する (最大せん断応力説)」というものである。

3章で導かれたように、三次元物体中での最大せん断応力 τ_{\max} は最大主応力 σ_1 と最小主応力 σ_3 (一般に $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) の差 $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ で表すことができることから、せ

ん断降伏応力を k とすると降伏条件が以下のように与えられる。

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k \quad (30)$$

この降伏条件を、一軸引張試験で得られる材料の降伏応力 σ_Y を用いて表すと、 $\sigma_1 = \sigma_Y$ および $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ より次のようになる。

$$\tau_{max} = k = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_Y}{2} \quad \therefore \sigma_Y = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (31)$$

すなわち、多軸応力下（組合せ応力下）にある物体中の最大主応力 σ_1 と最小主応力 σ_3 の差が材料の一軸引張降伏応力 σ_Y に達したときにその物体が降伏することを意味しており、これを“Tresca（トレスカ）の降伏条件”という。

(2) Mises（ミーゼス）の降伏条件

多軸応力下（組合せ応力下）にある物体中において、偏差応力の第2不変量が一定値 Y に達すると降伏するという説をミーゼス（von Mises）が提案しており、“Mises（ミーゼス）の降伏条件”として以下のように与えられている。

$$J_2' = \frac{1}{2}(\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) = \frac{1}{6}\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} = Y \quad (32)$$

一軸引張りの場合との整合性をとると（ $\sigma_1 = \sigma_Y$ および $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ）、 $Y = \sigma_Y^2/3$ となり、Mises の降伏条件は主応力表示で式 (33) のように与えられる（右辺 = $\bar{\sigma}$: 相当応力と呼ばれる）。なお、式 (34) には一般直交座標系（x-y-z 座標系）における Mises の降伏条件を参考のために記しておく。

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{2}\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}} \quad (33)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{2}\{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\}} \quad (34)$$

Mises の降伏条件についての物理的意味は必ずしも明確ではないが、Nadai (1937年) により、図10に示す3つの主応力軸と等角をなす方向を法線にもつ面に作用するせん断応力が一定値になると降伏することと同じであることが示されている。

この面の方向余弦は $(n_1, n_2, n_3) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ より、面上のせん断応力 τ_{oct} （八面体せん断応力という）が次式のように得られる。

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{1}{9}\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}} \quad (35)$$

前述と同様に、一軸引張りの場合との整合性をとると（ $\sigma_1 = \sigma_Y$ および $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ）、 $\tau_{oct} = \sqrt{3}\sigma_Y/2$ となり、式 (33) に示した Mises の降伏条件が導かれる。すなわち、Mises の降伏条件は、八面体せん断応力説としても解釈できる。

(3) Tresca と Mises の降伏条件の比較

図11に示すように、純粋せん断応力 τ （ $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$ ）をうける部材を想定して Tresca および Mises の降伏条件に従うときの降伏限界のせん断応力 τ_c を求めるとそれぞれ以下ようになる。

$$\tau_c = \frac{\sigma_Y}{2} \quad \text{: Tresca の降伏条件} \quad (36)$$

$$\tau_c = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \quad \text{: Mises の降伏条件} \quad (37)$$

このように、Tresca の降伏条件は、Mises の降伏条件に比べて限界条件が低く、降伏点設計に対してはより厳しい条件を与えることになる。すなわち、どちらの降伏条件を適用するかで材料が降伏するときの多軸応力（組合せ応力）状態が異なることに注意を払う必要がある。なお、実際の金属材料の降伏条件を平面応力状態で実測された結果によると、Mises の降伏条件に近いことが実証されている。

なお、材料が Mises の降伏条件に従う場合、部材に多

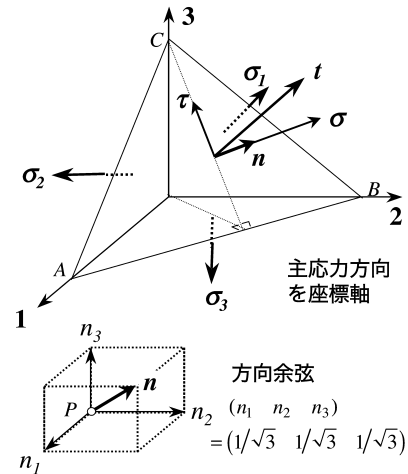


図10 主応力方向を座標軸とする正八面体の一面

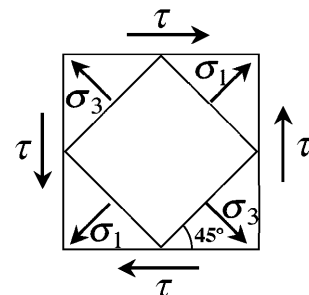


図11 純粋せん断を受ける部材

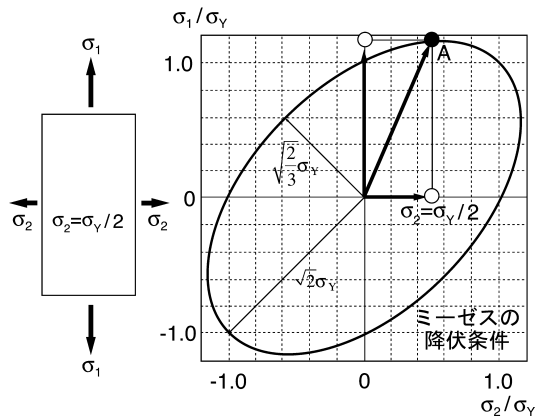


図12 二軸負荷を受ける平板の降伏時応力状態

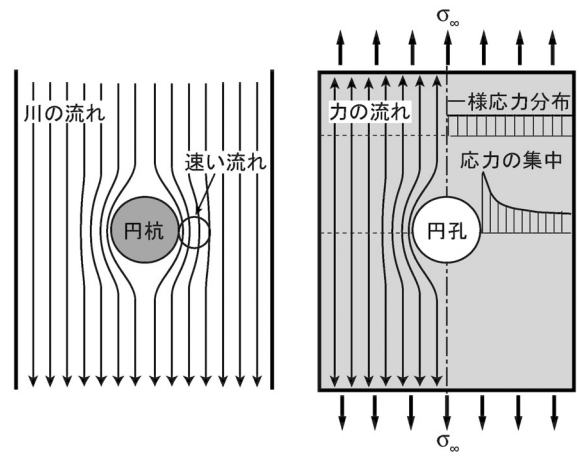


図13 円孔による応力集中の説明

軸応力が作用する場合には、主引張方向の応力を材料の降伏応力 σ_Y 以上に付与しないと降伏しない。図12は、平面応力状態が仮定できる平板に二軸負荷（主引張方向に垂直な方向に $\sigma_2 = \sigma_Y/2$ ）を与えた際の降伏時の応力状態を示したものである。このとき、Misesの降伏条件は式(33)より次式のようにだ円の方程式で与えられる。

$$\sigma_Y^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \quad (38)$$

平板は図中のA点で降伏することになり、そのときの主引張方向の応力 σ_1 が降伏応力よりも大きいことが理解できる。

7. 応力集中

疲労破壊や脆性破壊（脆性破壊の起点となるき裂の発生）に代表される事故の原因となる破壊は、ほとんどの場合、形状的な不連続部である応力やひずみが集中する箇所が起点となる。従って、構造部材の強度評価や設計の際には、全体的な応力分布状態に加えて、応力やひずみの集中要因によって局部的に生じる最大応力を十分に把握する必要がある。ここでは、応力集中の考え方の基礎を解説し、特に溶接部で想定される形状的不連続と応力集中との関係について紹介する。

7.1 応力集中の基礎

構造部材に切欠きや孔、フィレットなどにより形状的な不連続部が存在すると、応力状態は一様ではなくなり、そこに応力が局部的に集中する。これを「応力集中」という。図13は、孔（円孔）の空いた平板を一様な力で引張ったときの力の流れを模式的に示したものである。応力の流れ（主応力線で表している）は円孔の周囲を迂回するのを余儀なくされ、その結果、局部で主応力線が密集し、その部分で応力が大きくなる。これは、同図に示すように、水が流れる川に障害物となる杭（円杭）を立てたときに、水の流れが杭の両端で早くなるのと類似である。ここで、応力集中とは、あくまでも形状の一様性が変化するとき局部的に応力が大きくなることであり、図14に示すように、単なる断面減少による応力の上昇と混同しないよう明確に区別する必要がある。同図では、

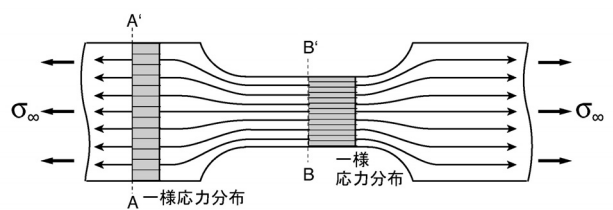


図14 断面減少による応力上昇

フィレット部から十分離れたA-A'断面およびB-B'面ともに一様な応力分布が形成され、当然ながら断面積の小さいB-B'面の応力の方が大きくなるが、これは応力集中とは呼ばない。

応力集中の程度を表示するために、一般に「応力集中係数 K_t 」が用いられる。応力集中係数 K_t は、式(39)に示すように適当にとった基準応力 σ_n に対する最大応力 σ_{max} （ピーク応力）の比で与えられる。なお、大きな負荷が作用する場合には応力集中部において塑性変形が生じるが、ここでは、特に断らない限り応力集中部においても弾性状態が保持される場合を対象とし、厳密には「弾性応力集中係数」と称するべきであるが簡略のために単に応力集中係数と称することとする。すなわち応力集中係数は、部材の形状・寸法のみによって決定されるものである。

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \quad (39)$$

ここで、部材の形状によっては応力分布状態が一様ではない場合が多いことから、基準応力は目的や場合によって一定のものではない。従って、応力集中係数 K_t を定める場合には、必ずこの基準応力を明解にする必要がある。後述のように、たとえ応力集中部における最大応力が同じであっても、基準応力の取り方次第では応力集中係数が大きく異なるので十分な注意が必要である。

基本となる応力集中係数の例として、遠方で応力が付与される広幅平板に円孔あるいはだ円孔が存在する場合を示す。図15に示すように、だ円孔のある広幅平板に遠方で一様応力 σ_∞ が作用する場合、 K_t はだ円孔の寸法だけ

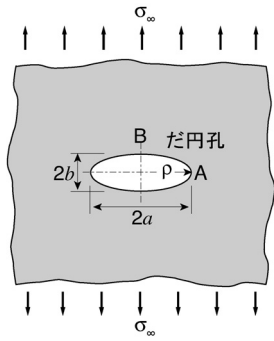


図15 広幅平板中のだ円孔

から決まる（だ円孔のサイズに比べて平板のサイズが十分に大きい）。このとき、作用応力方向の最大応力は図のA点で生じ、その最大応力 σ_{max} は式(40)で表される³⁾。従って、応力集中係数は式(41)となる（ただし、基準応力 σ_n は遠方での一様作用応力 σ_∞ である）。特に、円孔の場合は $a=b$ であり $K_t=3$ となることは、他の部材の応力集中係数を計る際の一つの参考となる。また、式(41)は、A点におけるだ円孔の曲率半径 ρ と長半径 a で式(42)のように表すこともでき（なぜなら $a/b=b/\rho$ ）、だ円に近似できる切欠き（先端半径 ρ ）に対する K_t を近似的に算定することもできる。なお、短軸端Bでは作用応力方向に垂直な方向には大きさが σ_∞ の圧縮の応力が作用する。

$$\sigma_{max} = \left(1 + \frac{2a}{b}\right) \sigma_\infty \quad (40)$$

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_\infty} = 1 + \frac{2a}{b} \quad (41)$$

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_\infty} = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (42)$$

7.2 部材の応力集中係数

現実の構造部材では、当然のことながら有限の寸法を有しており、一様な引張負荷のみならず曲げ負荷やそれらが重畳した負荷が作用する。ここでは、基本的な有限寸法の部材の応力集中係数と、その場合の基準応力の取り方について示す。

図16は、中央に円孔が存在する有限幅平板に遠方で一様応力 σ_∞ が作用する場合の応力集中係数を示したものである。基準応力を円孔の存在によって減少した断面に作用する公称応力 $\sigma_n (= \{W/(W-a)\} \sigma_\infty)$ で表した応力集中係数 K_t は、幅に対して円孔の大きさが微小である場合($a/W \rightarrow 0$)には3となるが、円孔が大きくなるにつれて小さくなる。ただし、円孔が大きくなると K_t は減少するものの、円孔縁に生じる最大応力は増大することを忘れてはいけない。一方、基準応力を遠方一様応力 σ_∞ で定めると、応力集中係数 $K_{t\infty}$ は逆に大きくなり極限($a/W \rightarrow 1$)では無限大となる。このように、円孔縁に生じる最大応

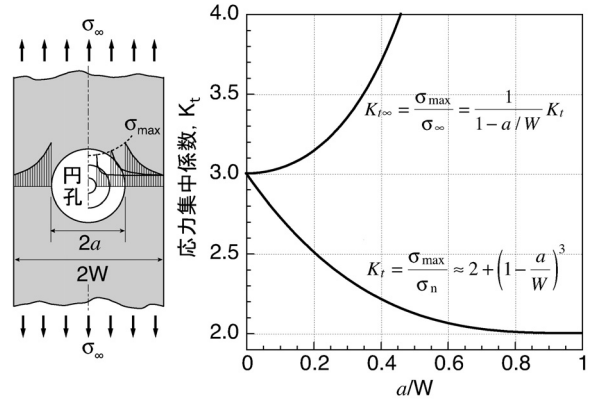


図16 有限幅平板中の円孔による応力集中

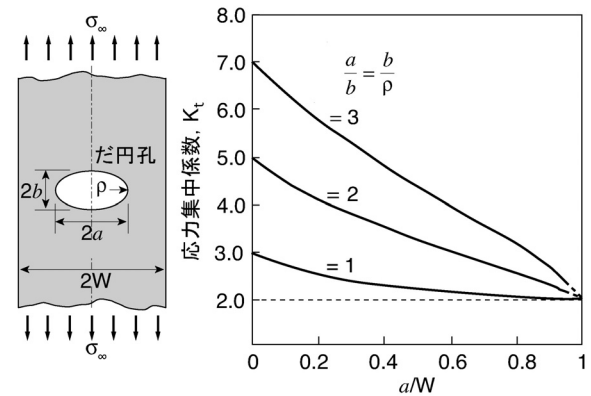


図17 有限幅平板中のだ円孔の応力集中係数

力が同じであっても、基準応力をいかに定義するかで応力集中係数が異なるが、基準応力が明確に定められてさえいればいずれを用いてもよい。すなわち部材に応じてより便利な基準応力を使用すればよいが、図16の例では、有限値の K_t を与えるネット断面の公称応力（円孔による応力集中は考えず、断面減少のみを考慮して算定される公称応力）を用いる方がより一般的である。図17は、だ円孔が存在する場合の K_t （ネット断面の公称応力を基準応力とする）を示すが、先に示した広幅平板に存在する場合と同様に曲率半径 ρ が小さいほど、また短半径 b が短いほど K_t は大きくなり、その傾向は長半径 a と板幅 W の比に依存する。

図18は、応力集中をきたす要因が理想的な一様応力場に存在しない部材を含めて、一般的な基準応力の取り方を示したものである。切欠きなどによる形状的不連続を有する部材に一様引張応力が作用する場合(a)には、図16の円孔の場合と同じでネット断面の公称応力が用いられる。また、(b-1)や(b-2)の例のように、切欠きやフィレットを有する部材が端部で集中荷重を受けて長手方向にモーメントが分布するような場合には、応力集中によって最大応力を呈する切欠き底やフィレット止端部が位置する断面において、切欠きやフィレットが存在しない場合の厚さ t の断面に生じる最大応力を基準応力として採用される場合が多い。ただし、後述のように溶接部に見られるアンダカットなどが応力集中源となる場合には、それが仮に存在しないものとしてその部位に生じる応力

(一様引張応力下では遠方応力 σ_∞)を基準にするのが工業的に便利である。

基本的な部材形状についての応力集中係数は、種々のハンドブック^{3, 4)}や便覧⁵⁾によって求めることができ、また特殊な場合には有限要素法解析などで適宜求めることができるが、基準応力の定義は明確にしておく必要がある。

最後に弾塑性応力集中係数について少し触れておく。基準応力が弾性範囲内であっても(材料の降伏応力よりも小さい)、応力集中部では局部的に降伏応力より大きな応力が作用し部分的に塑性ひずみを生じる場合がある。

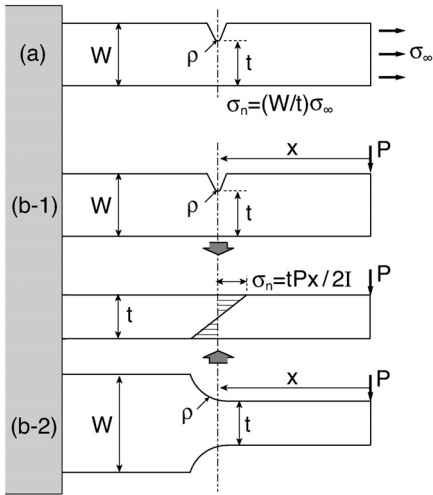


図18 一般的な基準応力の定義

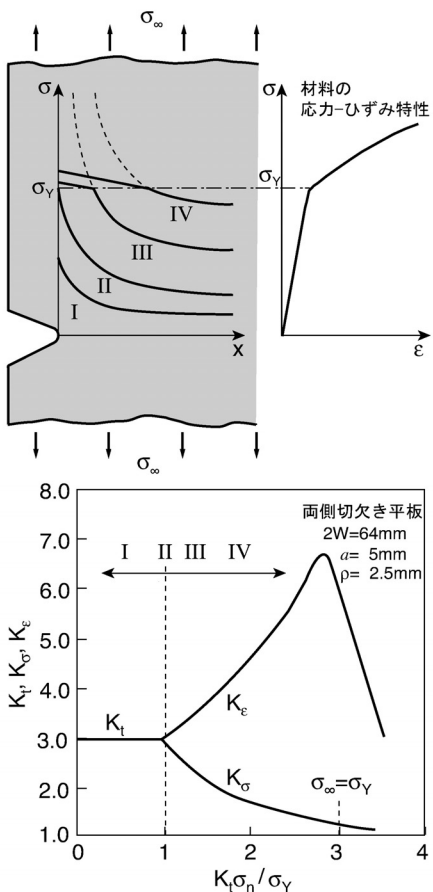


図19 弾性応力集中係数と弾塑性応力集中係数

図19は、切欠きを有する平板が遠方で一様応力を受ける場合の応力集中の様子を模式的に示したものである。応力集中部が塑性域に入ると(III), 応力集中係数(ここでは弾性応力集中係数と区別して K_e で表す)は弾性状態の値より低下することになる(ただし、ひずみ集中係数 K_e は高くなる傾向をもつ)。さらに荷重を増すと、塑性域はさらに拡大して応力分布は全体として一様になる傾向をもつ(IV)。従って、静的引張負荷を受ける部材の強度(引張強さ)は、最小断面積の大きさに強く依存し、局所的な応力集中によってはそれほど影響を受けないことになる。

7.3 溶接部における応力集中係数

溶接継手においては、溶接による余盛止端部で形状的な不連続となって応力集中が生じる。ここでは、余盛止端部を模擬した部材の応力集中係数 K_t と形状因子の関係について示す。なお、 K_t の基準応力 σ_n にはいずれも遠方での一様引張応力 σ_∞ を用いている。

余盛止端半径 ρ と応力集中係数 K_t の関係を図20(a)に示す(K_t は光弾性実験⁶⁾もしくはFEM解析⁷⁾で求められたものである)。止端半径 ρ が小さいほど K_t は大きくなり、特に $\rho < 1$ mmの小さな領域でその傾向が顕著に現れる。図20(b)は、余盛角 θ と K_t の関係を示している。余盛角 θ が小さくなると K_t が大きくなっているが、 θ の影響は止端半径 ρ が小さい方が大きい。なお、これらの影響は余盛高さ h と幅 b にも依存するが、ある程度大きくなる

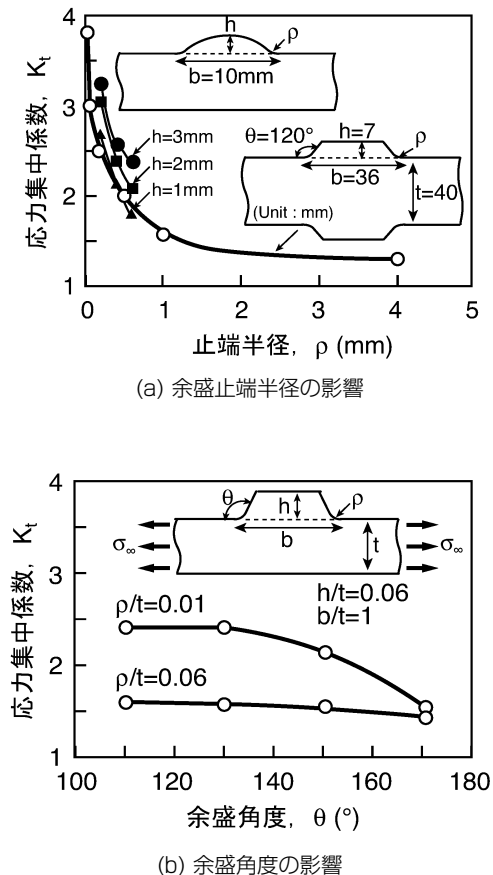


図20 応力集中係数 K_t に及ぼす余盛止端半径と余盛角度の影響

と K_t にはほとんど影響を及ぼさなくなる。

余盛止端部にアンダカットが存在すると応力集中が助長される。図21は、一例として、アンダカット底半径 $\rho_u = 0.3 \text{ mm}$ (余盛止端半径 $\rho = 2.0 \text{ mm}$) 場合の応力集中係数 K_t とアンダカット深さ d の関係を示したものである。なお、 K_t は体積力法で求められている。このように、 K_t はアンダカット深さ d の影響を顕著に受け、 d の増加とともに大きくなる。

なお、溶接継手の余盛止端部の応力集中を求める評価式が西田³⁾、寺崎⁸⁾、後川⁹⁾らによって提案されているので参照されたい。

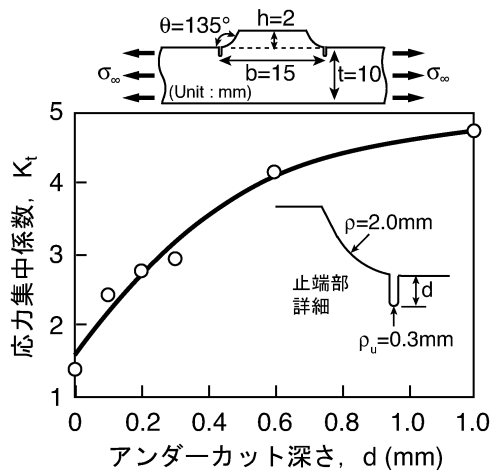


図21 応力集中係数 K_t に及ぼすアンダカット深さの影響

8. おわりに

本稿では、溶接構造の強度評価や設計の際に必要な材料の力学と強度について、その基礎を解説してきた。単なる知識の修得ではなく理解を深めることに重点を置いて紙面を割いたことから、重要な基礎事項の解説が抜けており、他に出版されている材料力学の書籍や溶接学会が刊行している種々のテキストを参考にされることを御願したい。別号において、具体的な溶接構造の各種強度特性や諸因子の影響など、またそれらをふまえた設計のあり方について解説されるが、実現象の理解をより深め、適切な設計に活かす上で、本稿が一助となれば幸いである。

参考文献

- 1) 日本溶接協会規格, WES2808-2003: 動的繰返し大変形を受ける溶接鋼構造物の脆性破壊性能評価法 (2003).
- 2) 南, 橋田, 豊田, 森川, 大村, 有持, 誉田: ローカルアプローチの適用による構造用鋼の動的破壊靱性評価 (第3報), 日本造船学会論文集, 184 (1998), pp.457-468.
- 3) 西田: 応力集中, 森北出版 (1973).
- 4) Peterson, R.E.: Stress Concentration Factors, John Wiley and Sons, New York (1974).
- 5) 機械工学便覧「材料力学」, 日本機械学会 (1984).
- 6) 高橋, 伊藤: 突合せ溶接継手余盛止端部形状と疲れ強さ, 溶接学会誌, 40-8 (1971), pp.723-735.
- 7) 西谷, 田中, 別所: SM50 鋼突き合わせ溶接継手の疲労強度, 溶接学会論文集, 2-1 (1984), pp.160-165.
- 8) 寺崎, 秋山, 横島, 磯谷, 堅田: 余盛形状と応力集中率, 溶接学会誌, 51-9 (1982), pp.790-796.
- 9) 後川, 中山: 溶接継手部の応力集中係数, 石川島播磨重工業, 23-4 (1983), pp.351-355.